线性代数D基本要求

1.掌握矩阵以及特殊矩阵（方阵、行（列）向量、零矩阵、上（下）三角矩阵、对角阵、单位阵）的概念

2.掌握矩阵的运算和相应的运算规律（矩阵的加法、数乘矩阵、矩阵的乘法、方阵的幂、矩阵的转置）

注意: 矩阵运算中不满足的运算律

3.会计算二阶、三阶行列式

4.掌握余子式和代数余子式的概念与计算

5.掌握n阶行列式按某一行（列）展开的定义

6.会用行列式的性质计算简单的高阶行列式

注意: 行列式的特殊结构

行列式的运算和矩阵运算的区别

线性代数D基本要求

7.掌握逆矩阵的定义与性质

8.理解克莱姆法则

9.会用公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$和初等变换法求逆矩阵，

会求解矩阵方程

10.掌握初等矩阵和初等变换的概念

11.理解矩阵秩的概念，会用初等变换求矩阵的秩

12. 理解向量组线性无关，线性相关等概念.

13. 掌握齐次线性方程组和非齐次线性方程组的解的存在定理及解的结构.

14.会用对增广矩阵做初等行变换的方法（消元法）求解线性方程组

线性代数D基本要求

1.掌握矩阵以及特殊矩阵（方阵、行（列）向量、零矩阵、上（下）三角矩阵、对角阵、单位阵）的概念

2.掌握矩阵的运算和相应的运算规律（矩阵的加法、数乘矩阵、矩阵的乘法、方阵的幂、矩阵的转置）

注意: 矩阵运算中不满足的运算律

矩阵加法 设有两个同型矩阵$A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right), B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵 数λ与矩阵A的乘积

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵乘法 设 $A=(a_{ik})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{kj})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，则规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})=AB$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

方阵的幂 A 是 n 阶方阵，k 为自然数，则 A^k 为 A 的 k 次幂，即

$$A^k=\underbrace{A\,A\cdots A}_{k\text{个}}$$

且 $A^0=I$.

方阵转置 把矩阵 A 的行列互换后得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T.

矩阵加法和数乘运算满足的运算律

(1). $A+B=B+A$; 交换律

(2). $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$;

$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$; 结合律

(3). $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

$\left(\lambda+\mu\right)A=\lambda A+\mu A$; 分配律

(4). $A+O=A$; 加法零元

(5). $A+(-A)=O$; 加法负元

(6). $1A=A$;

矩阵乘法满足的运算规律

(1)结合律 $(AB)C=A(BC)$; $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

(2)分配律 $A(B+C)=AB+AC$,

$$(B+C)A=BA+CA;$$

(3) $A_{m\times n}I_n = I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$;

$$A_{m\times n}O_n = O_m A_{m\times n} = O_{m\times n};$$

(4) $A^k A^l = A^{k+l}$

(5) $\left(A^k\right)^l = A^{kl}$.

注意

(1) 矩阵乘法不满足交换律.

(2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

由$AB=O,\ A\neq O$不能推出 $B=O.$

(3) 矩阵乘法不满足消去律，即

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}, A\neq O$不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}.$

判断:

$(1) AB = BA;$ $\times$

(2) 如果 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$; $\times$

(3) 如果 $AB = AC$ 且 $A \neq O$, 则 $B = C$; $\times$

$(4)\ (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2;$ $\times$

$(4)\ (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2;$

$(5) (A+B)(A-B) = A^2 - B^2;$ $\times$

$(5) (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2;$

转置矩阵的运算性质

$$(1)\left(A^T\right)^T = A;$$

$$(2)(A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3)(\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(4)(AB)^T = B^T A^T.$$

线性代数D基本要求

3.会计算二阶、三阶行列式

4.掌握余子式和代数余子式的概念与计算

5.掌握n阶行列式按某一行（列）展开的定义

6.会用行列式的性质计算简单的高阶行列式

注意: 行列式的特殊结构

行列式的运算和矩阵运算的区别

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (\boldsymbol{i = 1,2,\cdots,n})$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

余子式 在n 阶行列式中，把元素a_{ij} 所在的第i 行和第j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

行列式的性质

性质1 行列式与它的转置行列式相等. $D = D^T$.

性质2 行列式中任一行（列）的公因子可以从行列式中提出.

性质3 对换行列式中两行（列）位置，行列式的值改变符号.

推论 行列式某行（列）的代数余子式乘以另一行（列）对应元素，其和为零.

性质4 将行列式的某一行（列）的k倍加至另一行（列）, 其值不变.

性质5 若行列式中某行（列）各元素是两数之和，则该行列式等于两个行列式之和，这两个行列式对应行（列）是由原行列式对应元素分拆而成，其余行（列）元素不变.

计算行列式常用方法：

(1)利用性质把行列式化为上（下）三角形行列式，从而算得行列式的值.

第一步：化简第一列。

若第一列所有元素均为0，则行列式为0；

否则，从第一列元素中挑选一个最简单的非零元通过交换两行把它放在第一行，再把这一列其他元素化为零;

第二步：化简第二列。

暂不考虑第一行和第一列，对行列式剩下的部分重复第一步;

第三步：化简第三列。

暂不考虑前两行和前两列，对行列式剩下的部分重复第一步;

第四步：化简第四列……

(2)利用降阶法(定义), 在行列式含零元素较多时,可以按含零的行(或列）展开，降阶直到二阶或三阶行列式后计算.

行列式计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n\text{-}1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & c_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

方阵的行列式运算性质

$(1)\ \left|A^T\right| = |A|$;

$(2)\ |\lambda A| = \lambda^n |A|$;

$(3)\ |AB| = |A||B|$;

判断

(1) $|AB| = |BA|$; √

(2) $|A-B| = |B-A|$; ×

(3) $\big|\, |A|\ B \,\big| = |A||B|$; ×

(4) 若 $AB=O$, 则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$; √

若 $AB=O$, 则 $A=O$ 或 $B=O$; ×

(5) 若 $A^2-2A+I=O$, 则 A 非奇异; √

(6) 若 A 非奇异, 则 A^k (k 为正整数), A^T 也为非奇异矩阵; √

线性代数D基本要求

7.掌握逆矩阵的定义与性质

8.理解克莱姆法则

9.会用公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 和初等变换法求逆矩阵，

会求解矩阵方程

10.掌握初等矩阵和初等变换的概念

逆矩阵 对于n 阶矩阵A，如果有一个n 阶矩阵 B

使得 $$AB = BA = I,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B 称为 A的逆矩阵.

运算性质 (1) 若A可逆, 数$\lambda \neq 0$, 则λA可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

(2) 若A, B为n阶方阵且均可逆, 则AB亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

(3) 若A可逆, 则A^T亦可逆, 且$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

(4) 若A可逆, 则有$\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

克莱姆法则

如果线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有解且有唯一解.

其解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

逆矩阵的计算方法

(1)利用公式$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$;

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(2)初等变换法

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{初等行变换}]{} (I \mid A^{-1})$$

求解矩阵方程: $AX=B;\quad BX=A;\quad AXB=C$

矩阵的初等行（列）变换

(1) 对换两行;

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素;

(3) 把某一行的 $k\ (\neq 0)$ 倍加到另一行上.

初等矩阵 由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

(1) $|I(i,j)| = -1$; $|I(i(k))| = k$; $|I(i,j(k))| = 1$;

(2) $I^{-1}(i,j) = I(i,j)$; $I^{-1}(i(k)) = I(i(\frac{1}{k}))$;

$I^{-1}(i,j(k)) = I(i,j(-k))$;

定理2. 1. 1 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

线性代数D基本要求

11. 理解矩阵秩的概念，会用初等变换求矩阵的秩

12. 理解向量组线性无关，线性相关等概念.

13. 掌握齐次线性方程组和非齐次线性方程组的解的存在定理及解的结构.

14.会用对增广矩阵做初等行变换的方法（消元法）求解线性方程组

矩阵秩的定义 矩阵$A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$的非零子式的最大阶数称为$A$的秩.

若在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 数 r 称为矩阵 A 的秩.

矩阵秩的性质

$r(A)=r(A^T),r(kA)=r(A),k$为非零常数.

定理 2.2.1　初等变换不改变矩阵的秩

推论2.2.1　矩阵左乘或右乘可逆矩阵不改变矩阵的秩.

推论2.2.2　$m\times n$矩阵A,B等价的充分必要条件是$r(A)=r(B)$.

矩阵秩的求法

把矩阵用初等行变换变为阶梯形矩阵，阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

矩阵 $\longrightarrow$ 阶梯形矩阵

（1）从左往右找出第一个非零列.（从这个非零列中找到一个最简单的非零元，通过初等行变换把它换到第1行）

(2) 利用倍加变换，把第1行首非零元下面的元素化为零.

(3)暂时不考虑矩阵的第1行，对矩阵其余的部分重复上述步骤；然后，暂时不考虑前2行；

（4）继续上述步骤，直到把矩阵化为一个阶梯形矩阵.

阶梯形矩阵 $\longrightarrow$ 简化阶梯形矩阵

(1) 利用倍乘变换把每一个非零行的首非零元化为1；

(2) 从最后一个非零行开始到第一行，依次利用倍加变换把每行首非零元所在列的其他元素化为零.

(1) 与 (2)顺序可交换

简化阶梯形矩阵 $\longrightarrow$ 标准形

（1）从第一行开始到最后一个非零行，依次利用列倍加变换把每行首非零元所在行的其他元素化为零；

（2）利用对换变换，使得矩阵的左上角为单位阵.

A为方阵

A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow A$为非奇异矩阵

$\Leftrightarrow A$为满秩矩阵

$\Leftrightarrow A$的标准形为I

$\Leftrightarrow A$可以表示为多个初等矩阵的乘积

线性相（无）关 设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s,为n维向量组，若由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s构成的向量形式的方程：

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$$

仅有零解，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，否则，即若方程有非零解，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

线性组合

设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s,β为n维向量组，若由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s,β构成的向量形式的方程：

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$$

有解，则称向量β可以被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，或称β是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性组合.

下面的结论是否正确?

1. n维向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s线性相关$\Leftrightarrow$
向量组中至少有一个向量可被其余向量线性表示.

2. 任意一个包含零向量的向量组必线性相关.

3. n维向量α_1线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1$为零向量.

4. n维向量α_1，α_2线性相关$\Leftrightarrow$存在非零常数k,使得$\alpha_1=k\alpha_2$. ×

5. 如果一个向量组的一部分向量线性相关，那么这个向量组线性相关.

6. 如果一个向量组线性无关，那么它的任何一个非空的部分组也线性无关.

7. 如果一个n维向量组线性无关，那么在它的每一个向量上增加一个分量所得到的$n+1$维向量组也线性无关.

线性方程组解的结论

定理2.3.1 线性方程组$A_{m\times n}X=b$有解$\Leftrightarrow r(A\ b)=r(A)$;

有唯一解$\Leftrightarrow r(A\ \ b)=r(A)=n$;

有无穷多解$\Leftrightarrow r(A\ b)=r(A)<n$.

推论2.3.1 齐次线性方程组$A_{m\times n}X=O$有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n$.

定理2.3.3　如果齐次线性方程组$AX=O$的系数矩阵A满足$r(A)=r<n$，则必存在$n-r$个线性无关的解向量$\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_{n-r}$，使得：齐次线性方程组的全部解可表示为$\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_{n-r}$的线性组合，即

$$X=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$c_1,\ c_2,\cdots c_{n-r}$为任意常数.

称ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_{n-r}为齐次线性方程组的一个基础解系.

线性方程组解的结论

定理2.3.4　设η_0是非齐次线性方程组$AX=b$的一个解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是其导出组的一个基础解系，则$AX=b$的全部解可表示为：

$$\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r} \quad (c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}\text{为任意常数})$$

线性方程组的求解： $A_{m\times n}X=b$

(1)增广矩阵 $\to$ 阶梯形矩阵；

(2)判断：

（i） 若$r(A\ \ b)\neq r(A)$，则无解；

（ii）若$r(A\ \ b)=r(A)$，则

阶梯形矩阵 $\to$ 简化阶梯形矩阵；

(a) 若$r(A)=n$, 则方程组有唯一解，将简化阶梯形矩阵还原为对应的同解方程组，写出方程组的解.

(b) 若$r(A)<n$, 则方程组有无穷多解，选取$n-r$个自由未知量，求出导出组的一个基础解系和原方程组的一个解，将它们组合得到方程组的通解.

期中考试：

1. 时间：4.11（上课）
2. 范围：线性代数部分

习题课：

1. 时间：4.9晚18：00—19：30
2. 地点：1304
3. 内容：第二章复习，期中考试前答疑

作业码：GPAWAD